Problemes

Juanjo Rué
Universitat Politècnica de Catalunya

Com cada any i amb el bon temps, que permet tant les sortides a peu (o en bicicleta) pel Pirineu com els matins estivals d'esbarjo a la costa del nostre Mare Nostrum, arriba la *SCM/Notícies* amb la seva secció de problemes. Aquesta vegada tindrem dos problemes de geometria, proposats pels nostres col·laboradors habituals Miquel Amengual i Joaquim Nadal i Vidal, des de cala Figuera, a Mallorca i Llagostera, respectivament. Un altre dels nostres col·laboradors infatigables, en José Luis Díaz Barrero des de Barcelona ens proposa una de les seves enginyoses desigualtats. Finalment, des de la redacció proposem un problema de teoria de conjunts amb un cert regust combinatori... on no cal més que saber comptar amb els dits (però adequadament i amb molta gràcia!). Agraïm a tots els col·laboradors efusivament la seva generositat en la proposta de problemes.
Finalment, anem a les solucions dels problemes proposats en el número anterior. No hem rebut cap solució del problema A155, amb el qual incloem la solució del proponent. Així mateix, incloem també l'elegant solució d'en Xavier Ros-Otón del problema A154 que ell mateix va proposar (junt amb una solució alternativa més analítica). Quant al problema A156, cal remarcar l'elegant solució d'en Miquel Amengual que no només demostra el que es demana, sino que a més a més ens ha demostrat que molts dels passos intermedis són de fet euclidians (fent la prova encara més maca!) Per acabar, hem rebut solucions correctes dels diversos problemes per part d'en Miquel Amengual, en Joaquim Nadal, l'Ernest Garriga (des de Mataró) i l'Esteve Casas (des de Sant Celoni). Gràcies a tots ells per les propostes de solucions.
Cal remarcar que les indicacions tècniques habituals (que no inclouen ni desigualtats, ni relacions trigonomètriques): l'adreça d'entrega de qualsevol proposta és la següent:

`juan.jose.rue@upc.edu`.

Aquest humil recol·lector de problemes i de solucions agrairà especialment els textos escrits en TEXo LaTEX (i, en especial, les figures de les construccions geomètriques proposades.)

Problemes proposats

A157. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)
Sobre els costats AB, BC i CA d'un triangle rectangle $\triangle ABC$, amb l'angle recte en A, es construeixen triangles equilàters $\triangle ABF$, $\triangle BCD$ i $\triangle CAE$. Els triangles $\triangle ABF$ i $\triangle CAE$ a l'exterior de $\triangle ABC$ i, interiorment, el triangle $\triangle BCD$.
Proveu que el quadrilàter $\square AEDF$ i el triangle $\triangle ABC$ tenen la mateixa àrea.

A158. (Proposat per la redacció.)
Un conjunt finit de nombres enters no negatius A es diu que és *avariciós* si $|A| \in A$. Un conjunt avariciós A és minimal si cap subconjunt de A és avariciós.
Trobeu el nombre de subconjunts avariciosos minimals de $\{1, \ldots, n\}$.

A159. (Proposat per José-Luis Díaz Barrero, BarcelonaTech UPC, Barcelona.)
Siguin x_1, x_2, x_3, x_4 nombres reals positius amb producte igual a 1, trobeu el valor mínim de

$$\sum_{\text{cic}} \frac{1}{x_1^3(x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_2)},$$

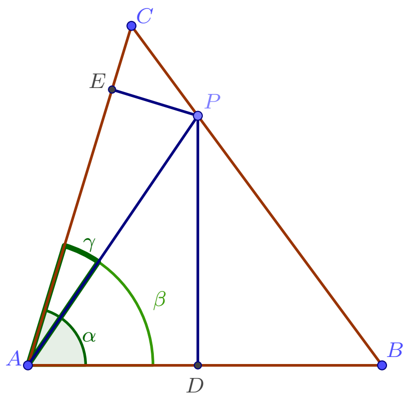
on $\sum_{\text{cic}}$ indica la suma cíclica sobre els índexs.

A160. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera.)
En el triangle $\triangle ABC$, siguin A', B', C' tres punts situats sobre BC, AC i AB respectivament. Suposeu que $AC' = p \cdot AB$, $BA' = q \cdot BC$ i $CB' = r \cdot AC$. Sigui S l'àrea del triangle $\triangle ABC$ i S' l'àrea del triangle $\triangle A'B'C'$.
Demostreu que si $p+q+r = 1$, aleshores $\frac{S}{S'} \geq 3$.

Solucions

A153. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)
Sigui $\triangle ABC$ un triangle amb $\widehat{CAB} < 90°$ i $AB = AC$. Sigui P un punt del costat BC tal que $BP > PC$. Denotem per D i E els respectius peus de les perpendiculars tirades des de P a AB i CA.
Proveu que $[\triangle APD] > [\triangle APE]$, on $[\triangle XYZ]$ denota l'area del triangle $\triangle XYZ$.

Solució: (Solució d'Esteve Casas, Sant Celoni.)
Un dibuix de la configuració és el següent, on s'indiquen els diversos angles amb lletres gregues.



Podem observar que

$$\begin{aligned}\left[\triangle APE\right] &= \frac{1}{2}AP^2\cos(\gamma)\sin(\gamma)\\ &= \frac{1}{4}AP^2\sin(2\gamma),\\ \left[\triangle APD\right] &= \frac{1}{2}AP^2\cos(\beta)\sin(\beta)\\ &= \frac{1}{4}AP^2\sin(2\beta).\end{aligned}$$

Ens cal demostrar doncs que $\sin(2\gamma) < \sin(2\beta)$. Sabem que $CP < BP$ i per tant que $\gamma < \beta$. Tenim doncs dues opcions a estudiar:

(1) $\beta \le 45°$ ó $2\beta \le 90°$, aleshores en ser $\sin(x)$ una funció creixent per a tota tria de $0 \le x \le 90°$ i $2\gamma < 2\beta$ és clar que $\sin 2\gamma < \sin 2\beta$.

(2) $\beta > 45°$. En aquest cas tindrem que $90° - \beta < 45°$. D'altra banda, la hipòtesi que $\beta + \gamma = \alpha < 90°$, fa que $\gamma < 90° - \beta$. A partir d'aquí tot es redueix al cas anterior, ja que

$$\begin{aligned}\sin(2\beta) &= \sin(180° - 2\beta)\\ &= \sin[2(90° - \beta)] > \sin(2\gamma).\end{aligned}$$

És clar que si l'angle $\widehat{CAB} = 90°$, aleshores, independentment de la posició de P, les àrees dels dos triangles serien sempre iguals.

A154. (Proposat per Xavier Ros-Otón, Universitat de Zuric, Zuric.)
Sigui $\{a_n\}_{n\ge 0}$ una successió de nombres reals positius, demostreu que si la sèrie

$$\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0 + a_1} + \frac{a_n}{a_0 + \cdots + a_{n-1}} + \ldots$$

és convergent, aleshores la sèrie $\sum_{n\ge 0} a_n$ també ho és.

Solució 1: (Solució d'Ernest Garriga, Centre Sant Pau, Mataró)
Per a $n \ge 0$ indiquem $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n}$, on $S_n = a_0 + \cdots + a_n$. Per provar l'enunciat veurem que si $\sum_{n\ge 0} a_n$ és divergent, aleshores $\sum_{n\ge 0} b_n$ també ho ha de ser. Fixem $N \ge 0$. Per a $0 \le n \le N$ sigui $f_n : [0, N+1] \to \mathbb{R}$ la funció definida per

$$f_n(x) = \begin{cases} (S_{n+1} - S_n)x + (n+1)S_n - nS_{n+1}, & \\ & \text{si } x \in [n, n+1], \\ 0, & \text{si } x \notin [n, n+1]. \end{cases}$$

Notem que en ser $S_{n+1} > S_n$ la funció f_n és estrictament creixent en l'interval $[n, n+1]$. Com que $f_n(n) = S_n$, $f_n(n+1) = S_{n+1}$, pel teorema del valor mitjà existeix $\xi_n \in (n, n+1)$ tal que $\frac{f_n(n+1) - f_n(n)}{n+1-n} = f_n(n+1) - f_n(n) = f_n'(\xi_n)$. Per tant,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{f_n(n+1) - f_n(n)}{f_n(n)} \\ &= \frac{f_n'(\xi_n)}{f_n(n)} \overset{(*)}{=} \sup_{x\in(n,n+1)} \left\{\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\right\} \\ &> \int_n^{n+1} \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\,dx = \log\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right). \end{aligned}$$

on la desigualtat $(*)$ surt del fet que $f_n'(x)$ és constant i $f_n(x)$ creixent en $(n, n+1)$. Les sumes parcials de la sèrie $\sum_{n\ge 0} b_n$ compleixen aleshores que

$$\begin{aligned} T_N = \sum_{n=0}^N b_n &> \sum_{n=0}^N \log\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right) \\ &= \log\left(\prod_{n=0}^N \frac{S_{n+1}}{S_n}\right) \\ &= \log\frac{S_{N+1}}{a_0} \end{aligned}$$

Finalment, de suposar que $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = +\infty$ en resulta que $\lim\limits_{N\to\infty} T_N = +\infty$, tal com volíem demostrar.

Solució 2: (Solució de Xavier Ros-Otón,, Universitat de Zuric, Zuric.)
Demostrarem que, de fet, per a tot $n \geq 1$, tenim

$$\log(a_0 + \cdots + a_n) < \log a_0 + \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0+a_1} + \frac{a_n}{a_0+\cdots+a_{n-1}},$$

i aquesta desigualtat implica clarament el resultat que volem demostrar. Per a demostrar la desigualtat, notem que com que $x > \log(1+x)$ per a tot $x > 0$, aleshores

$$\frac{a_{k+1}}{a_0+\cdots+a_k} > \log\left(\frac{a_0+\cdots+a_{k+1}}{a_0+\cdots+a_k}\right) = \log(a_0+\cdots+a_{k+1}) - \log(a_0+\cdots+a_k), \tag{1}$$

i sumant per $k = 0, \ldots, n-1$ obtenim que

$$\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0+a_1} + \frac{a_n}{a_0+\cdots+a_{n-1}} > \log(a_0+\cdots+a_n) - \log a_0,$$

tal com volíem veure.

A155. (Proposat per José-Luis Díaz Barrero, BarcelonaTech UPC, Barcelona.)
Siguin $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n nombres positius tals que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, demostreu que

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k - a_{k+1})^2}{a_k + a_{k+1}} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k a_{k+1}\Big)^{1/2} \leq 1.$$

(En aquesta fórmula els subíndexs es consideren mòdul n, i per tant $a_{n+1} = a_1$.)

Solució: (Solució de José-Luis Díaz Barrero, BarcelonaTech UPC, Barcelona.)
Comencem expressant l'inequació usant la següent forma, més convenient per als nostres propòsits:

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k - a_{k+1})^2}{a_k + a_{k+1}} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k a_{k+1}\Big)^{1/2} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Aquesta desigualtat és equivalent (després de reordenar termes) a demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k a_{k+1}\Big)^{1/2} \geq \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k - a_{k+1})^2}{a_k + a_{k+1}}.$$

Si mirem ara el terme de l'esquerra, es compleix que:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k a_{k+1}\Big)^{1/2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2} - \sqrt{a_k a_{k+1}}\right),$$

i per tant la inequació serà resolta si demostrem que, per a tot valor de k, la desigualtat següent també és certa:

$$\frac{a_k + a_{k+1}}{2} - \sqrt{a_k a_{k+1}} \geq \frac{(a_k - a_{k+1})^2}{4(a_k + a_{k+1})}.$$

De fet, la desigualtat anterior és equivalent a la següent

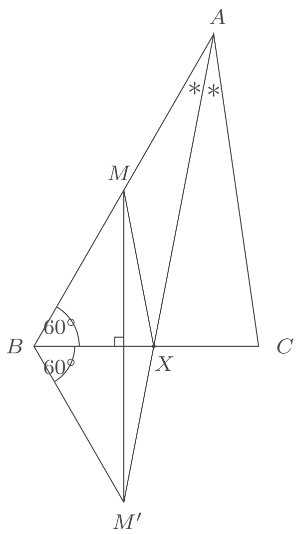
$$2(a_k + a_{k+1})\big(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}\big)^2 \geq (a_k - a_{k+1})^2. \tag{2}$$

$$2(a_k + a_{k+1}) \geq \big(\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}\big)^2$$

Substituint aquesta desigualtat en el terme de l'esquerra de (2) obtenim el que volíem demostrar. Observeu a més, que la desigualtat es dona amb igualtat per $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1/n$.

A156. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera.)
En el triangle $\triangle ABC$, $\widehat{ABC} = 60°$, sigui M el punt mig del segment AB i sigui $Z(X) = AX + XM$ on X és un punt del segment BC, trobeu l'àrea i el perímetre del triangle $\triangle ABC$ sabent que el mínim valor de $Z(X)$ és 21 i que aquest mínim s'assoleix quan X és el peu de la bisectriu de l'angle $\widehat{BAC}$.

Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)
Sigui M' el punt simètric de M respecte del costat BC de $\triangle ABC$. Aleshores, $XM = XM'$ i minimitzar $AX + XM$ equival a minimitzar $AX + XM'$. Com que $AX + XM'$ ateny el seu mínim valor quan A, X i M' estan alineats, el mínim valor de $Z(X)$ donat a l'enunciat del problema s'obté quan la bisectriu de $\widehat{BAC}$ passa per M'.



En $\triangle ABM'$, BX és bisectriu i, per tant,

$$\frac{AX}{XM'} = \frac{AB}{BM'}.$$

És a dir, com que $BM = BM'$ i i M és el punt mitjà del segment AB,

$$\frac{AX}{XM'} = \frac{AB}{BM} = 2.$$

Tenint present que $AX + XM' = 21$, resulta que $AX = 14$, $XM' = 7$. D'altra banda, com que $\widehat{ABM'} = 120°$, es té

$$\begin{aligned} AM'^2 &= AB^2 + BM'^2 + AB \cdot BM' \qquad (\dagger)\\ &= AB^2 + BM^2 + AB \cdot BM \\ &= AB^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + AB \cdot \left(\frac{1}{2}AB\right). \end{aligned}$$

Fent aquí $AM' = 21$ podem aïllar AB i ens queda:

$$AB = 6\sqrt{7}.$$

En $\triangle ABX$, XM és una mitjana i, per tant,

$$4 \cdot XM^2 = 2 \cdot BX^2 + 2 \cdot AX^2 - AB^2.$$

Substituint aquí XM $(= XM' = 7)$, AX i AB pels seus valors, es dedueix que

$$BX = 2\sqrt{7}. \tag{3}$$

En $\triangle ABC$, AX és bisectriu i, per tant,

$$\frac{CA}{XC} = \frac{AB}{BX} = \frac{6\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} = 3 \tag{4}$$

i, com que $\widehat{ABC} = 60°$, tenim:

$$\begin{aligned} CA^2 &= AB^2 + BC^2 - AB \cdot BC \qquad (\ddagger)\\ &= AB^2 + (BX+XC)^2 - AB\cdot(BX+XC). \end{aligned}$$

Substituint aquí el valor de XC deduït de (2) ($XC = \frac{1}{3}CA$) així com els de AB i XC, s'obté l'equació de segon grau

$$\begin{aligned} CA^2 = {} & \left(6\sqrt{7}\right)^2 + \left(2\sqrt{7} + \frac{1}{3}CA\right)^2 \\ & - 6\sqrt{7}\left(2\sqrt{7} + \frac{1}{3}CA\right) \end{aligned}$$

l'única solució admissible de la qual és

$$CA = \frac{21\sqrt{7}}{4}.$$

Per tant, tindrem:

$$XC = \frac{7\sqrt{7}}{4}. \tag{5}$$

Tenint present (1) i (3), resulta:

$$BC = BX + XC = \frac{15\sqrt{7}}{4}.$$

Una vegada conegudes les longituds dels costats de $\triangle ABC$, en coneixem el perímetre:

$$15\sqrt{7}$$

i la fórmula d'Heró permet conèixer-ne l'àrea:

$$\frac{315\sqrt{3}}{8}.$$

Vegem ara que les igualtats ($\dagger$) i ($\ddagger$) són, de fet, dos resultats euclidians. La proposició següent és un resultat euclidià, el qual, al seu torn, implica que ($\dagger$) i ($\ddagger$) es poden obtenir per mètodes purament euclidians.

Proposició: Si $\triangle ABC$ és rectangle en B i $\widehat{CAB} = 30°$, llavors $BC = \frac{1}{2}CA$.

Prova de la proposició: Sigui C' el punt simètric de C respecte de B. Els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle ABC'$ són iguals (els dos són rectangles i tenen els corresponents catets iguals). Per tant, $AC' = CA$ i $\widehat{C'AB} = \widehat{CAB}$ $(= 30°)$.

Així doncs, $\triangle AC'C$ és equilàter (és isòsceles i té un angle de 60°), d'on deduïm que:

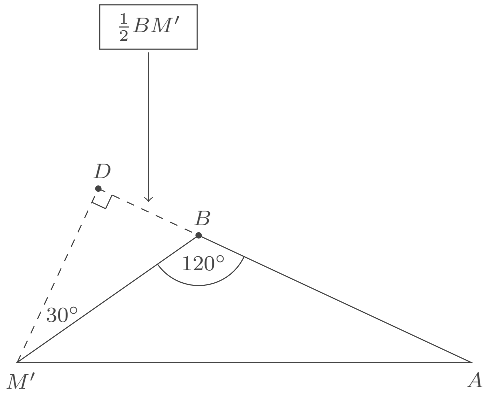
$$CA = C'C = C'B + BC = 2 \cdot BC \text{ i } BC = \frac{1}{2}CA.$$

Prova de ($\dagger$) : Sigui D el peu de la perpendicular traçada des de M' a AB. Aleshores,

$$AM'^2 - AD^2 = BM'^2 - BD^2.$$

Substituint aquí (vegeu la figura següent) AD per $AB + BD$, s'obté:

$$AM'^2 = AB^2 + BM'^2 + 2 \cdot AB \cdot BD. \qquad (6)$$



Pel teorema de l'angle exterior, aplicat al triangle rectangle BDM' en B,

$$\widehat{DM'B} = 30^\circ$$

i, per la proposició

$$BD = \frac{1}{2}BM'.$$

Substituint aquest valor a (4) s'obté (†). Anàlogament, sense usar el teorema del cosinus, s'obté (‡).

Matemots

Xavier Gràcia
Universitat Politècnica de Catalunya

Recordeu que es tracta d'un joc de llengua (vegeu l'article introductori al número 33 de la *SCM/Notícies*). Cal resoldre els enigmes lingüístics següents, a partir de la definició donada i les pistes incloses.

Exemple: «Els nombres preferits pels fotògrafs» (8 lletres). La resposta és «negatius», que fa referència tant als nombres com a les pel·lícules negatives de la fotografia analògica.

Aquest cop hem preparat un monogràfic dedicat als nombres, apte per a totes les edats. De fet, no especificarem el nombre de lletres de la solució. Certament, hi ha *molts* nombres naturals, però si ens limitem als que raonablement podem relacionar amb paraules o sintagmes breus, ja no en són tants.

En cas de dubte podeu trobar-ne les respostes al peu de pàgina.[12]

Trobeu els **nombres naturals** amagats dins les definicions següents:

(a) Ganes de beure

(b) El millor amic del Tintín

(c) No paga

(d) Estàs sord!

(e) Sense res

(f) Percep

(g) Acabat de fer

(h) Professors de matemàtiques

12 Respostes als Matemots: (d) nou-cents; (a) set; (g) nou; (e) vuit; (h) dos-cents; (b) mil u; (f) cent; (c) deu.